ゲーデルの定理の疑点について

藤　平　秀　行

宇都宮大学教育学部紀要
第64号　第２部　別刷
平成26年（2014）３月

For Doubtful Points of the Theorem of Gödel

FUJIHIRA Hideyuki

ゲーデルの定理の疑点について

For Doubtful Points of the Theorem of Gödel

藤平　秀行*
FUJIHIRA Hideyuki

There is a theoretical structure that looks like a circular argument in the proof of the theorem of Gödel. The purpose of this small paper is to point out that there are doubtful points on the theory of Gödel.

キーワード：公理系　真偽　不完全性定理

１．目的

この小文の目的はゲーデルの理論の疑義を指摘することである。ゲーデルの定理は哲学など多くの分野に様々な影響を与えた定理であるが、その本当の意味はほとんど誰も知らない。本当の意味が知られなかったからこそ大きな影響を与えることができたのである。世に不完全性定理の解説は星の数ほどあるが、この小文もそのうちのひとつである。しかし、私の知る限り、ゲーデルの言う”正しいが証明できない”という意味を正しく理解している解説者は皆無である。

２．準備

命題とは真か偽である主張と言われるが、この定義は不適切である。真か偽かどちらか一方であるような主張はすでに真偽は決まっているのだから、したがって、真の主張と偽の主張のことを命題というのである。真か偽かわからない主張は真でも偽でもないかもしれないので命題とは言わない方がよい。ゲーデルの定理は真偽が決定できない命題（Satz）[注]を扱っており、こうなると命題というものの定義はほとんど不可能である。意味不明であるかそうでないかの基準がないからである。

(注) Satz は文の意だが命題・定理・公理などをも指しており、日本語の命題との意味的相違はかなりある。命題と訳さない方がよい。以下、主張と呼ぶ。

それでは真であるとはどういうことだろうか。例えば １＝１ という論理式は真であることが自明のようであるが、1 とは何か、真とは何か、等しいとは何か、1 というものはふたつとないのに 1 と 1 が等しいとはどういうことか、よく考えると自明ではない。したがって、これらは公理として認めておくべきことなのである。そして使用可能な推論形式を定め、公理をもとに必要な定義を行い、論理を展開して結論を導く。その結論を真というのである。

公理から結論が得られたとき、その結論は真であり証明可能である。証明が可能でない状態には、真でない主張、予想、連続体仮説などのように、いくつか意味の異なる場合がある。公理

* 数学教室

は議論のはじめとなる取り決めだから真偽の対象ではなく、証明可能でないとは言わない。

この小文で考える公理系は使用可能な推論形式までを含めた大きな体系である。選択公理のように、すでにある体系に一部分として組み込まれたようなものでなく、また、幾何学におけるユークリッドの公理のようなものでもない。それだけでは論理を展開することはできないからである。定義はしないが、簡単に言えば、現在の数学の体系のことだと思えばよい。

公理系をそれを外側から考えるようなことをしてはいけない（外側からは何を基準に議論すればよいのだろう）。だからというか、また、公理系 P に p を加えた公理系 P' を考えると、p は P' の中で証明可能になる、というような不毛な議論はやめよう。数学の体系に連続体仮説を組み込んだから、連続体仮説は証明可能になりましたと言われてもうれしくない。

数学の公理に真偽はない。真ならば公理として定める必要はないし、偽ならば問題外である。実数の公理である連続性公理をみてもそれは明らかである。開集合など実世界には存在しない。自然数にしろ、実数にしろ、三角形にしろ、集合にしろ、実際に存在するものなど何一つない。すべて概念として定義されたものであり、その性質は実世界に適合するように公理によって適宜定められたものである。

公理系（数学の体系）P から結論として主張 p が得られたとき、すなわち $P \Rightarrow p$ が成り立つとき、p は真であるという。このとき、公理系 P に真偽はないのだから、得られた結論 p にも真偽はない（当然のことなのだが、このことに気が付いている人はほとんどいない）。だが、P から何が言えるのかを考えるのが数学である以上、p を真であると言うのである。数学における真とはそういうことである。

したがって、真であることを証明可能とも言う。ここで、「p である」ことと「p は真である、すなわち証明可能である」こととは異なることに注意すべきである。真か偽だけの命題のみを扱うときには、これらは区別をする必要はないが、真偽が決定不能である主張を扱うときには厳密にこの区別をしなければならない。

主張 p から主張 q が得られるとき、主張 $p \Rightarrow q$ は真であるという。$p \Rightarrow q$ は p から q を論理の連鎖で導くことを意味する。数学では $p \Rightarrow q$ が成り立つとき、これを定理という。数学とは p から q が得られることを保証する学問なのである。このとき、p と q の真偽は問題としていないことが重要である（実際に真偽はないのだから）。たとえば、主張 $1=2 \Rightarrow 3=4$ は $1=2$ の両辺に 2 をたせば $3=4$ が得られるから真であり、したがって、これは定理である。数学はこの意味で真なる学問なのである。ゲーデルの定理は P または特定の p の無矛盾性・証明可能性を問題にしているのであって、多くの解説書にあるように、数学は矛盾しているか不完全であるかのいずれかであるとか、数学の正しさは保証されないなどという議論は全くの見当違いなのである。だから、数学に革命を起こすはずの定理であっても数学に何の革命も起きてはいないのである。

ここで、p や q の真偽と $p \Rightarrow q$ の真偽に違いがあるように思われるが、p や q の真偽は $P \Rightarrow p$ が成り立つかどうかであって、どちらも推論の正しさについてであり、同じ意味なのである。最後に、$P \Rightarrow P$ は真であることに注意しよう。すなわち P は真である。たとえ P に矛盾があっても真なのである。

数学という学問や真という概念は普通に考えれば以上のような捉え方になると思われるが、このような捉え方がなされていないために多くの誤解が生じているのではないかと思うのである。$1+0=1$ や $0<1$ は”正しい”もの、真理だと思い込んでいると本質は見えてこない。これらは P での取り決めである。公理であるから本来的には真偽はない。数学に”正しい” p などない。P を仮定したもとで真なのだ。

3．パラドックス

ゲーデルはいわゆるパラドックスを参考にして自身の結果を出している。そこで、パラドックスについて簡単に述べておくことにする。パラドックスには集合に関するものと論理に関するものがあり、集合に関するパラドックスには

・カントールパラドックス：すべての集合の集合を S とすると、S は集合だから $S \in S$ である。これは S の最大性に反し、矛盾である。

・ラッセルパラドックス：$H = \{ x : x \notin x \}$ とすると $H \in H \Leftrightarrow H \notin H$ が真となるが、これは矛盾である。

などがある。

不思議なことに、誰もがこの矛盾を認めて、回避することのみを考えた。無制限に対象を広げてはいけない、自己言及は避けよ、… などなど。誰一人、矛盾があれば仮定に誤りがあるか、推論過程に誤りがあるかのいずれかであると指摘することはなかった。それが論理の基本ではなかったか。論理は注意深く展開すれば自己言及などで崩れたりしない。論理に矛盾などないはずである。

すべての集合を集めることができたとして、それを S と命名したときに、S の中に S はない。S はすべての集合だから $S \in S$ であるなどと、何と能天気な議論がなされてきたことだろう。カントールはどんな集合についてもその部分集合全体の方が濃度が高いことを証明している。したがって、自然数に最大数がないと同様に集合にも最大の集合はないのだから、ないものを S としたら矛盾が出るに決まっている。ラッセルパラドックスも全く同様である。S と同様に $H \in H$ であるはずがない。したがって、たとえ $H \notin H$ を仮定しても、定義によって $H \in H$ は成り立たないのである。それよりもなによりも、矛盾が出たと思ったのなら、H などというものはないという方向に向かうべきだったのである[注]。

(注) カントールの名誉のために言うが、カントールは上記のような誤謬はしていない。ラッセルがしたのである。

次に、論理に関するパラドックスであるが、ゲーデルが論文の中で言及したパラドックスがふたつある。ひとつは次の嘘つきパラドックスである。

・あるクレタ人が「クレタ人はうそつきだ」と言った。

この言明を真とすれば偽であるし、偽とすれば真であるし・・・。この矛盾はまだ解決されたとは言えない状況にあるとか、何かの解説書で読んだことがあるが、しかし、「クレタ人はうそつき」の否定は「あるクレタ人はうそでないことを言うことがある」ということになぜ気が付かないのだろうか。うそしか言わない人間は「私はうそつき」と言うことはできない。ほんとしか言わない者が「私はうそつき」と言ったというのであれば、もはや論理の問題ではない。したがって、そのクレタ人はたまたまうそを言ったまでのことである。

もうひとつはリシャールパラドックスと呼ばれるものであるが、説明が長くなるからここに書かないが、どちらもゲーデルの表現によれば循環論法的定義がなされているため、パラドックスが生じるように見えるのである。

さらに、論文では言及されていないが、ゲーデルが構成した決定不能である論理式は次の有名なパラドックスにも似ている。

・この文は偽である

である。この文とはそれ自身をさすのだろう。これはクレタ人のパラドックスと同じ構造を持つように見えるが、そうではなく、主語である”この文”が入れ子になっていて、意味のない文であり、それゆえ真偽の対象にはならないのである。真偽が入れ替わるように見えるのは主語、したがって文章が確定していないから。入れ子を止めてそのつど意味を判断するから。文章が確定していれば真偽は決まるのである。古来から非常に多くの議論がなされているが、この文が無意味であることがわからないのだろう。”この文”にこの文を代入することを繰り返そうとしてみればすぐわかる。したがって、この小文の最初にある「この小文の目的は … である」という文は本当は意味が確定していないということになり[注]、したがってまた、この文章もそうである（入れ子を１回で止めたときの意味とする）。

(注) 解決策のひとつは「２節以下の目的は … である」とすることである。

４．公理系と真偽

$\mathcal{P}$ を公理系とする。$\mathcal{P}$ は公理だから真偽はなく、無矛盾かどうかが問題となる。$\mathcal{P}$ のもとで構成される主張を p（p である）や q （q である）で表す。主張の中には真でも偽でもないものや真偽が決定できないものがあるかもしれない。

公理系 $\mathcal{P}$ をもとに議論を行うとき、得られた主張 p が真かどうかは $\mathcal{P}$ をもとに判断する以外にない。正しいことの基準を体系の外に求めることはできない。p が真であるとは $\mathcal{P}$ から論理の連鎖によって p が結論されることを言う。すなわち

定義 4.1　p は真である $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{p})$ が成り立つ

である。$\mathcal{P}$ には真偽という概念がまだないのだから、$\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{p}$ の真偽は真偽表から結論することはできない。が、

定理 4.2　$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{p})$ は真である $\Leftrightarrow$ p は真である。

証明　$\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{p}$ は $\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{p})$ と同値であるから。

定理 4.3　$\mathcal{P}$ は真である。

証明　$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}$ が成り立つから。

$\mathcal{P}$ はたとえ矛盾があっても真である。真と決めるのである。定理4.3 によって、p が真であることの定義4.1の正当性が保証される。$\mathcal{P}$ は真だから、主張 $\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{p}$ が真である必要十分条件は p が真であることだからである。

定義 4.4　p は証明可能である $\Leftrightarrow$ p は真である

公理から導けない主張を真だと言うことはできないし、証明できればたとえ矛盾を含んでいても真であると言うのである。ただし、導けなくても成り立つ主張はあるがそれは真とは言わないの

である。ゲーデルの言う”正しいが証明できない”を真だが証明できないと解釈していると、この定義は理解できないと思う。

一方、p が偽であるとは、p から公理系 $\mathcal{P}$ に反することが導かれること、すなわち $p \Rightarrow \sim\mathcal{P}$ が真であるときをいう（～は否定(not)を表す）。これは $\mathcal{P} \Rightarrow \sim p$ と同値であるから、

定義 4.5　p は偽である $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{P} \Rightarrow \sim p)$ は真である

である。すなわち、偽であるとはその否定が真であることである。したがって、

命題 4.6　p は真 $\Leftrightarrow$ ～p は偽、　～p は真 $\Leftrightarrow$ p は偽

が成り立つ。しかし、真でも偽でもない主張があるかもしれないから、「真でない」や「偽でない」はそれぞれ偽や真とはならない。真でも偽でもない主張はもちろん真偽が決定できないから、

命題 4.7　p は真でない $\Leftrightarrow$ p は偽か真偽が決定できない
　　　　　　p は偽でない $\Leftrightarrow$ p は真か真偽が決定できない

となる。$\mathcal{P} \Rightarrow p$ の否定と $\mathcal{P} \Rightarrow \sim p$ は同値ではないから、真でないことと偽、偽でないことと真とは異なるのである。

真偽が決定できない状態、決定不能、とは次のように定義される。

定義 4.8　真でなくかつ偽でないことを決定不能という。

したがって、

”p が証明可能でないということは p が偽であるか決定不能かのいずれか”

である。

命題 4.9　p は決定不能 $\Leftrightarrow$ ～p は決定不能

は自明である。

定義 4.10　公理系 $\mathcal{P}$ に矛盾があるとは $\mathcal{P} \Rightarrow p$ と $\mathcal{P} \Rightarrow \sim p$ がともに真であるような p が存在することである。

$\mathcal{P}$ に矛盾があれば何でも証明できるので、すべての p は決定不能であり、そして真であり、偽であり、真でないし、偽でない。したがって、一般には公理系 $\mathcal{P}$ のもとで、$\mathcal{P}$ が無矛盾でないかもしれないのだから、

命題 4.11　・p が真のとき、～p は偽であるが、真かもしれない
　　　　　　・p が偽のとき、～p は真であるが、偽かもしれない

ということになる。すなわち、真かつ偽であるような p（矛盾）が見つかれば（このとき、すべての p は真かつ偽であるが）、$\mathcal{P}$ は無矛盾ではないと結論されるのである。

5．$p \Rightarrow q$ の真偽表

本来的には $\mathcal{P}$ や p、q に真偽はないのだから、$p \Rightarrow q$ の真偽の判定には真偽表を用いることはできない。そこで、ここまでの真偽の定義に矛盾がないかを確認するために、ここまでの真偽の定義による $p \Rightarrow q$ の真偽表を考える。

$\mathcal{P} \Rightarrow p$ と $\mathcal{P} \Rightarrow q$ が真であるとき、p を仮定してもしなくても $\mathcal{P} \Rightarrow q$ が真だから、 $\mathcal{P} \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ は真である。

$\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{p}$ と $\mathcal{P} \Rightarrow \sim\mathrm{q}$ が真であるとき、$\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{q}$ は偽だから、$\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{p}$ が真ならば$\mathcal{P} \Rightarrow (\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q})$ は偽である。

$\mathcal{P} \Rightarrow \sim\mathrm{p}$ と $\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{q}$ が真であるとき、$\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{q}$ が真だから、$\mathcal{P} \Rightarrow (\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q})$ は真である。

$\mathcal{P} \Rightarrow \sim\mathrm{p}$ と $\mathcal{P} \Rightarrow \sim\mathrm{q}$ が真であるとき、$\mathcal{P} \Rightarrow (\sim\mathrm{q} \Rightarrow \sim\mathrm{p})$ は真であるから、$\mathcal{P} \Rightarrow (\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q})$ は真である。

ゆえに $\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$ の真偽表は

p	q	p⇒q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

（T：真　F：偽）

となり、既存の表と同じである（と言うか、既存の表は実はこの意味だったのである）。したがって、否定に関する命題4.6とあわせ、公理系 $\mathcal{P}$ のもとで、$\mathcal{P}$ は真なのだから、数学は安心して論理を展開できるのである。

この真偽表は真偽が決定不能である場合については情報を与えてくれない。p や q が決定不能であっても $\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$ は真であり得る。そこで、決定不能な主張を含めた、いわば真偽表の拡張を考えよう。「p は真でない」の否定は「p は真」だが、対偶や背理法を考えるときは

p は真でない $\Leftrightarrow$ $\sim$p は偽でない

であることに注意が必要である。命題4.7 と

p	q	p⇒q
U	T	T
T	U	F
U	F	F
F	U	T
U	U	?

（U：決定不能　？：真と偽がある）

から次の表を得る。$\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$ の真偽は、q が真ならば真であること、p が偽ならば真であること、真から真でないことは導けないこと、が基本公理である。

p	q	p⇒q	p	q	p⇒q
T	～T	F	F	～F	T
T	～F	?	F	～T	T
～T	T	T	～F	F	F
～T	F	?	～F	T	T

これ以外の組み合わせはすべて ？ である。背理法に関しては、$\sim$p を仮定して真でない r が導かれたとき、$\sim$p は真でないと結論されることである。特に r が偽（矛盾）であったときには従来どおり $\sim$p は偽、すなわち p は真であると結論される。$\mathcal{P}$ が無矛盾でないときには、何でもが成り立つのだから、$\mathcal{P}$ が無矛盾のときのみを考えればよいのである。

ここでは真偽表が正しいことを証明したが、ついでに言っておくと、真偽表は例えば論理式 $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ がすべての x で真であることを主張する。$x = 2$ のときも、$2 = 1 \Rightarrow 4 = 1$

は真であると主張しているのである。これが $x=1 \Rightarrow x^2=1$ が真であることの意味なのである。x として 1 のみを考えているとしたら論理を語る資格はない。ちなみに $x=1$ のとき、この式は $1=1 \Rightarrow 1=1$ であり、これも真偽表から真である。

６．決定不能性定理

ゲーデルの証明した定理のうち、よく知られているものは２つある。そのひとつ第１定理と呼ばれる定理 (定理 VI) は

任意の ω-無矛盾かつ再帰的な論理式の集合を κ とするとき、κ と $\mathcal{P}$ を含み、関係 $\Rightarrow$ で閉じている最小の論理式の集合を $\mathrm{F}(\kappa)$ とする。このときp $\notin \mathrm{F}(\kappa)$ かつ ～p $\notin \mathrm{F}(\kappa)$ を満たす p が（$\mathcal{P}$ のもとで）存在する。

というものである。簡単に言えば、

$\mathcal{P}$ が ω-無矛盾ならば、決定不能である p が存在する

ということである。

ゲーデルは公理系 $\mathcal{P}$ が「p は証明可能ではない」という主張を論理式で記述できるほど整った体系であるとき、

(a)　p $\Leftrightarrow$ (p は証明可能でない)

を満たす論理式 p を構成することができることを示した。その p が決定不能だと言うのである。(ω-無矛盾性の仮定は無矛盾性の仮定よりも強い条件である。p の証明不可能性の証明に $\mathcal{P}$ の無矛盾性、～p の証明不可能性の証明に $\mathcal{P}$ の ω-無矛盾性が用いられる。)

p という主張を「p は証明可能でない」と定義すれば p は (a) を満たすが、この決め方では自己言及をしていて p は意味をなさない。ゲーデルはこの自己言及を避けるために巧妙な方法をとった。論文では論理式の数値化について非常に精密な議論がなされていて、それに気をとられて本筋を見失うから、ゲーデル自身が論文の冒頭に厳密ではないがと前置きしてまとめたものを考える。

「x は証明可能である」(=「x は真である」) ということを Bew(x) であらわす。以後、真＝証明可能、偽＝否定が証明可能、であるから、適宜読み替えてわかりやすい方で考えればよい。

(1) 自然数型の自由変数 v をひとつ持つすべての論理式を順序付けして並べ、
　n 番目の式を $\mathrm{R}n$ とする。
(2) 論理式 $\mathrm{R}n$ の自由変数に n を代入した式を $\mathrm{R}n(n)$ と書く。
(3) $\mathrm{K} = \{n : \sim\mathrm{Bew}(\mathrm{R}n(n))\}$ とする。
(4) $\mathrm{S}(v)$ を $v \in \mathrm{K}$ を表す論理式とする。
(5) S は ある m 番目に書かれているから、$\mathrm{S} = \mathrm{R}m$ である。

このとき $\mathrm{R}m(m)$ が (a) を満たす論理式であるという。

$\mathrm{R}m(v)$ は

$$\mathrm{R}m(v) := v \in \{n : \sim\mathrm{Bew}(\mathrm{R}n(n))\}$$

として定義されている。

$$m \in \{n : \sim\mathrm{Bew}(\mathrm{R}n(n))\} \Leftrightarrow \sim\mathrm{Bew}(\mathrm{R}m(m))$$

が成り立つから、R$m(m)$ は (a) を満たす。このとき

$$\mathrm{R}m(m) \text{ は真} \Rightarrow m \in \mathrm{K} \Leftrightarrow \sim \mathrm{Bew}(\mathrm{R}m(m)) \Leftrightarrow \mathrm{R}m(m) \text{ は真でない}$$

$$\sim \mathrm{R}m(m) \text{ は真} \Rightarrow m \notin \mathrm{K} \Leftrightarrow \mathrm{Bew}(\mathrm{R}m(m)) \Leftrightarrow \mathrm{R}m(m) \text{ は真}$$

が成り立つ（と論文に書いてある）[注1]。したがって、R$m(m)$ は真として矛盾、偽としても矛盾だから決定不能である[注2]。

(注) 1．「(p は真) ⇒ p」は真である（逆は真ではない）。ゲーデルは $\mathcal{P}$ の条件として「$\mathcal{P}$ で証明可能な論理式は"内容的に真 (inhaltlich richtig)"」を仮定しているが、これはこのことを言っているのである。

(注) 2．R$m(m)$ は決定不能であるから $m \in \mathrm{K}$ である。ゲーデルはこのことを「R$m(m)$ は"内容的に真"であるが証明できない」と言っている。R$m(m)$ であるが R$m(m)$ は証明できない、すなわち「p ⇒ (p は真)」は真とは限らないのである。これが"正しいが証明できない主張"の意味である。p ⇔ ∼Bew(p) がなりたつとき、p は決定不能であるから p は証明可能でない。したがって、∼Bew(p) は正しいが、決定不能である。言い換えると p は証明可能でないのだが、そのことを証明することはできないのである。

(注) 3．R$m(m)$ 自身は証明できないが、注２で「$\mathcal{P}$ が無矛盾ならば $m \in \mathrm{K}$ すなわち R$m(m)$ である」が証明されていることに注意すべきである。

ゲーデルは自己言及を避けるために (1)∼(5) の方法をとったのだが、結果的に (a) を満たす主張は自己言及の形にならざるを得ない。ゲーデル自身も論文の中でリシャールの逆理や嘘つきパラドックスとの類似を認めているが[注]、このような構成法をとってよいのだろうか。単なる記号の羅列に真偽を与えてよいのだろうか。

(注) ゲーデルは論文の注で、"偶然"に Rm と名付けられたのであり、この定義は循環論法的に見えるがそうではないと理由をあげて強調している。

(1)∼(5) を簡単にまとめると、

(1') 論理記号の有限列を順序付けして並べ、順に R1, R2, ... と名付ける。

(2') m 番目は $v \in \{n : \sim\mathrm{Bew}(\mathrm{R}n(n))\}$ である。

となる。かくして

$$\mathrm{R}m(m) := m \in \{n : \sim\mathrm{Bew}(\mathrm{R}n(n))\} \Leftrightarrow \sim\mathrm{Bew}(\mathrm{R}m(m))$$

が確定する（ゲーデルは $\mathrm{K} = \{n : \sim\mathrm{Bew}(\mathrm{R}n(n))\}$ が $\emptyset$ ではないことを証明していない。対角線上の R$n(n)$ は自己言及を起こしている可能性は高い）。

しかし、R$m(m)$ の真偽が定まらないということは $m \in \mathrm{K}$ の真偽が定まらないことである。論理的に、その原因は集合 K が正しく定義されていないことに限る。$m \in \mathrm{K}$ の真偽を判断するときに、与えられた条件は R$m(m) \Leftrightarrow \sim\mathrm{Bew}(\mathrm{R}m(m))$ のみである。「R$m(m)$ は（R$m(m)$ は真でない）と同値」という同値条件のみで意味のわからない R$m(m)$ の真偽を判断できるわけがない。無理に真偽を仮定するとどちらも矛盾を生じるというだけのことである。R$m(m)$ は $m \in \mathrm{K}$ として確定しているように見えるが、実は K が R$m(m)$ にも依存するため、定義が完成されていないのである。そして、R$m(m)$ は上の同値条件のみであるから、その具体的な式もその意味もわからない。すなわち、$m \in \mathrm{K}$ は決定不能であるということではなく、K が well defined でないのである。

そもそも式に名前 Rn が付いていなければ、$m \in \mathrm{K}$ は無意味な記号列である。無意味な記号列、例えば $\mathrm{L} := m \in \{n : \mathrm{S}(n) \text{ は真である}\}$ に 名前 S(m) を与えると、L は意味を持ったこ

とになるのだろうか。その真偽にどんな意味があるのだろうか。L にはまた、$\sim \mathrm{S}(m)$ という名前を与えることもできるが、そのとき L の真偽は変わってしまうのだろうか。たしかに、$\mathrm{S}(m)$ というような名前ではなく式番号を与えると、$\sim \mathrm{S}(m)$ というような番号の与え方はできないように思われる。しかし、これは式番号と自然数を混同しているからである。式番号 m は名前であって自然数ではない。m という自然数で名付けられた式のことである。式m すなわち $\mathrm{S}(m)$ を自然数 m と同等に扱ってはいけないと私は（私だけかもしれないが）思うのである。

論理式の真偽は与えられた名前とは無関係でなければならない。式に式番号をつけたら意味と真偽が変わるようなようなことは許されない。したがって、導入した順序とその式を同一視することは注意が必要である（$n \in \mathrm{K}$ を n と同一視したら入れ子が発生し、$\cdots(((n \in \mathrm{K}) \in \mathrm{K}) \in \mathrm{K}) \in \cdots$ となって絶望的である[注]）。順序を導入することは $\mathrm{R}m$ を含む論理式に $\mathrm{R}m$ という名前を与えるのと同じ効果をもたらすことになるから、その論理式の真偽が自分自身の番号に依存してしまうような結果を生じるのである。

(注) ただし、p $\Leftrightarrow$ $\sim$Bew(p) $\Leftrightarrow$ $\sim$Bew($\sim$Bew(p)) $\Leftrightarrow$ $\cdots$ の場合は p $\Leftrightarrow$（p は真でない）と p $\Leftrightarrow$（p は偽でない）が繰り返される。

ということで、$\mathrm{R}m(m) := m \in \mathrm{K}$ は決定不能ではなく、正しく定義されていない無意味な主張であると見るべきである。ゲーデル数に関係する主張にゲーデル数を与えれば自己言及が起きるに決まっている。ゲーデル数に関しては多くの解説がなされており、いまさら疑念を呈してももはや遅いかもしれないが、私はやはり「ゲーデルの理論には誤謬がある」と思わざるを得ないのである。

しかし、この方法が許されるのならば、これは非常に魅力的である。p に関するすべての主張 F(p) に対して、それが $\mathcal{P}$ のもとで形式的に記述できるならば、p $\Leftrightarrow$ F(p) を満たす p が存在することが保証されるのである。$\mathrm{R}k(k) := k \in \{n : \mathrm{F}(\mathrm{R}n(n))\}$ となる k があるからである（ただし、$\{n : \mathrm{F}(\mathrm{R}n(n))\} = \emptyset$ のとき、p は偽となることは自明である）。したがって、

p $\Leftrightarrow$（p は偽）　　p $\Leftrightarrow$ $\sim$p　　p $\Leftrightarrow$（p $\Rightarrow$ $\sim$p）
p $\Leftrightarrow$（p は真でも偽でもない）

など、興味ある式を満たす p の存在が保証される。これらの p はすべてどのような意味を持つ主張なのかわからないが、とにかく真でも偽でもない。

特に、与えられた主張 q（例えばある $\mathrm{R}n_0(n_0)$）に対して、p $\Leftrightarrow$（p $\Leftrightarrow$ q）を満たす p が存在するが、q が偽であるとき、p は真としても偽としても決定不能としても矛盾となる。ゆえに、q が偽であるとき、p は真でも偽でも決定不能でもない。

また、こういうことも可能である。$\mathrm{R}m(v) := v \in \{n : \mathrm{R}n(n)$ は真$\}$ を満たす m があり、m に対してさらに $\mathrm{R}k(v) := v \in \{n : \mathrm{R}m(n)$ は偽$\}$ を満たす k がある。このとき

$\mathrm{R}m(k)$ $\Leftrightarrow$（$\mathrm{R}k(k)$ は真）　と　$\mathrm{R}k(k)$ $\Leftrightarrow$（$\mathrm{R}m(k)$ は偽）

が同時に成り立つ。定理4.2 から

（x は真）$\Leftrightarrow$（（x は真）は真）　と　（x は偽）$\Leftrightarrow$（（x は偽）は真）

が成り立つから

$\mathrm{R}m(k)$ は真 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{R}k(k)$ は真 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{R}m(k)$ は偽

$$\mathrm{R}m(k)\ \text{は決定不能} \Rightarrow ((\mathrm{R}k(k)\ \text{は真})\ \text{は真})\ \text{は偽} \Leftrightarrow \mathrm{R}m(k)\ \text{は偽}$$

が成り立つ。これらは共に矛盾であり、したがって、$\mathrm{R}m(k)$ は真でも偽でも決定不能でもない。

以上のことはゲーデルの構成する形式系において実現可能である。ゆえに次の定理が成り立つ（厳密ではないが）。

定理 6.1 数学の体系 $\mathcal{P}$ は無矛盾ではない。
(Satz 6.1 Es besteht ein Widerspruch in dem System der Mathematik $\mathcal{P}$.)

証明 $\mathrm{R}m(k)$ は真でないとすると矛盾だから真である。また、$\sim \mathrm{R}m(k)$ は真でないとすると矛盾だから真である。もちろん、$\mathrm{R}m(k)$ のかわりに上記の p を用いてもよい。

単なる記号の羅列に番号と真偽を与えると、このような絶大な結果が得られるのである（なぜ絶大かというと、$1=0$ も $1 \in \emptyset$ も真であることがわかるからである）。

7．不完全性定理

それでは決定不能である主張は存在するのだろうか。まず、ゲーデルの第２定理を確認しておこう。第２定理（定理XI）は

公理系 $\mathcal{P}$ が無矛盾ならば、$\mathcal{P}$ が無矛盾であることは証明可能でない

というものである。矛盾があれば何でもが言えるので、第２定理においては「$\mathcal{P}$ が無矛盾ならば」と断る必要はない。

この定理は w を「$\mathcal{P}$ は無矛盾である」とすると、w は論理式

(b) $\mathrm{x} \Rightarrow \sim\mathrm{Bew}(\mathrm{x})$ （＝ x は真でない）

を満たすことを主張する。x ならば「x は真」が成り立つように思われるが、すでに述べているように、論理式 x $\Rightarrow$ (x は真) は x が決定不能のとき成り立たない。x であっても「x は真」でないことがあるのである。

ここで、(b) が成り立つ必要十分条件は x が真でないことであることはすぐわかる。(b) は論理式としては一般には成り立たない式であるが、ゲーデルは x が w のときには成り立つ、すなわち w は真ではないと言っているのである。w は真ではないから結論が真となり、定理は成り立つのである。

ゲーデルの論文では、この第２定理の証明は概略が述べられている。論文IIで詳細な証明がなされるはずであったが、なぜか実行されなかった。その概略とは次のようである。

「第１定理から、$\mathcal{P}$ が無矛盾ならば p $\Leftrightarrow$ (p は証明可能でない) を満たす p があり（p の証明不可能性の証明には $\mathcal{P}$ の ω-無矛盾性ではなく、無矛盾性のみが使われている）、$\mathcal{P}$ が無矛盾ならば p である（６節注３）。ここで $\mathcal{P}$ が無矛盾であることが証明可能であるとすると、p は証明可能となり、p $\Leftrightarrow$ (p は証明可能でない) であるから矛盾となる。」

しかし、この証明には違和感がある。「p は証明可能でない」と同値な p があるとき、その同値性から p が証明可能でないことが言えるのだろうか、ということである。p と「p は証明可能でない」が共に偽である場合には言えないことは明らかであり、第１定理によれば p も「p は証明可能でない」も決定不能であるから真ではないからである。しかし（内容的に）”p は

証明可能ではない”のだから、微妙ではあるが言えるような気もする[注]。ともあれ、この第2定理の証明は第1定理を用いていることがあって、私は疑問を持つのである。

(注) ゲーデルは論文の注で、その正当性を p はそれ自身の証明不可能性を主張しているからと言っているが、それらは”同値”である。

さて、無矛盾性を背理法で証明しようとすると一種の自己言及が起きる。$\mathcal{P}$ が無矛盾であることを証明してみよう。

「$\mathcal{P}$ は無矛盾でないとすると偽である主張（矛盾）r が導かれる。これは逆もなりたつから、$\mathcal{P}$ が無矛盾でないことと r は必要十分。したがって、$\mathcal{P}$ が無矛盾でないことは偽である。ゆえに $\mathcal{P}$ は無矛盾である。」

この証明は正しいように見える。しかし、矛盾がないことを証明するのに矛盾があると仮定して矛盾を出すというこの証明方法が許されるのならば、矛盾というものは世の中に存在し得ない（存在しないのかもしれないが）。

矛盾があると仮定したら矛盾が出るのは当然である。そして r がその矛盾であったということであり、矛盾があると仮定して矛盾が出たのだから何の矛盾も生じてはいないのである。矛盾があると仮定して、仮定に反すること、すなわち、矛盾が出ないということが導けたときにはじめて矛盾が生じたことになるのである。いや、これは正確な言い方ではない。矛盾があると仮定すれば、矛盾が出ないことさえも導けるからである。そういう意味ではなく、”矛盾があると仮定して、それから導かれるすべての主張に矛盾がなかったとき”、矛盾が生じたと言えるのである。しかし、すでに矛盾 r が導かれているのだから、これは成り立たない。したがって、無矛盾性を背理法で証明することはできないのである。

このことを了解すると、ゲーデルとは違った角度から第2定理の証明をすることができる。すなわち $\mathcal{P}$ が無矛盾であることを証明するためには、定義によって $\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{q}$ と $\mathcal{P} \Rightarrow \sim\mathrm{q}$ が真であるような q が存在しないことを示さなければならない。存在性の証明は見つければよいのだが、非存在性の証明は背理法以外にはない（今のところは）。そして、無矛盾性の証明には背理法を使うことはできない。ゆえに $\mathcal{P}$ が無矛盾であるとき、$\mathcal{P}$ が無矛盾であることを証明することはできない。

ゲーデルの定理は単に「$\mathcal{P}$ は無矛盾である」という論理式自身を証明することはできないと言っているように見えるが、ここで述べた証明は論理式を証明することによってではなく、実際に証明できないということを鮮明に示している。もちろん厳密な証明であるとは思われないが、なぜ証明できないかがよく理解できると思う。

最後に、主張「$\mathcal{P}$ は無矛盾である」を w とすると、w は証明可能でないのだから、$\mathcal{P}$ について「$\sim$w は証明可能でない」を仮定すると w は決定不能となる。したがって、第1定理において、ω-無矛盾という仮定を「$\mathcal{P}$ は無矛盾でないことは証明可能でない」という仮定に置き換えることができるとゲーデルは指摘している。したがって、この意味で第1定理も成り立つことが証明されたが、6節で示したとおり、いわゆるゲーデル文が決定不能であることは疑わしいので、w が（上記の仮定のもとで）決定不能である主張の貴重な例である。

8．結論

前節 w の存在によって結果的に第 1 定理も第 2 定理も真である。第 1 定理は第 2 定理の系として。しかし、これらの定理のゲーデル自身による証明は不完全であったと言わざるを得ない。これらの定理は多くの論文で議論されているが、私の知る限り、「真である」という概念をここで述べたように捉えている例はない。証明可能性と真偽を切り離すと「真である」という概念の定義が必要になる。私はここでの定義以外にこれに成功した例を知らない。公理を出発点として議論を始めるのが数学だから、公理から導くことができない主張を真だと言えるわけはない（公理から得られた結論でさえ”真偽”はないのだから）。また、真でないことを偽としたら決定不能という概念はなくなるはずであるが、なぜかそれでゲーデルの定理が証明されているような例もある。決定不能とは真か偽のいずれかだが決定はできないという意味ではない。真として矛盾、偽としても矛盾なのだから、真でも偽でもないのである。

ゲーデルの方法について言えば、変数に代入してはいけないものの検討をせずに代入することが行われている。無制限に代入する危険性は 6 節で示したが、少なくとも式とその式番号を同一視する危険性の検討は必要である。すべての記号列に真偽を与えると、互いに矛盾する主張が現れるかもしれないという認識ぐらいは持つべきではないか。

ゲーデルの第 2 定理はいろいろな解釈を生んで（数学以外の）多くの分野に多大な影響を与えたと言われる。数学の正しさは証明できないので信じるしかないとか、人類の知の限界をあらわすものだとまで拡大解釈されたことは驚くべきことだ（数学はそんなにすごくない。数学は人間の足が 2 本であることを”正しいが”証明できない）。公理に限らず自身に関することは自身からは証明することはできないのは当然であって、定理はそれを証明したにすぎないのである。現在の数学の体系 $\mathcal{P}$ について言えば、たしかに無矛盾であるかそうでないかはわからない。だが、数学にとってそれは大きな問題ではない。数学は $\mathcal{P}$ のもとで $\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{p}$ あるいは $\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$ の真偽、すなわち導けることを保証するものであり、$\mathcal{P}$ や 導いた結果の p、q を保証するものではないからである。p が定理なのではない。 $\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{p}$ や $\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$ が定理なのである。$\mathcal{P}$ に矛盾があろうがなかろうが、どんな x についても

$$x^2 = -1 \quad \text{ならば} \quad e^{x\theta} = \cos\theta + x\sin\theta$$

なのである。

この小文は以上のことを複雑な論理式を用いることなく誰にでもはっきりとわかるように説明をすることを目的としていたのである。最後に言っておきたいことは、論理に矛盾はないということである。が、その無矛盾性は証明できない。その理由は明白である。

9．参考文献

プリンキピア・マテマティカおよび関連した体系の形式的に決定不能である主張
について I
ウィーン科学アカデミー紀要 1930 no.19
フォン・クルト・ゲーデル　ウィーンにて

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathamatica und verwandter
Systeme I, Anzeiger der Akad. d. Wiss. in Wien 1930, Nr.19
Von Kurt Gödel in Wien